

Weightings of Shannon Entropy's Additivity for Image Segmentation

Gallão, Celso Dênis e Rodrigues, Paulo Sérgio
 Grupo de Inteligência Artificial e Processamento de Imagens e Sinais
 Centro Universitário da FEI
 São Bernardo do Campo, São Paulo, Brasil
 celso.gallao@fatec.sp.gov.br
 psergio@fei.edu.br

Abstract—Thresholding based on classical Shannon entropy doesn't find an optimal partition in images whose probability distribution of luminance can be approximated by bimodal Gaussians functions. Here we show that an appropriate balancing of Shannon additivity formalism allows to achieve a quality of segmentation identical to that observed when the optimal threshold is analytically calculated over these Gaussians. Thus, different weights are applied between the regions of interest. The quality of results remains the same even under parameter changing in the probability distribution.

I. INTRODUÇÃO

A separação de uma cena em regiões de interesse, conhecida como segmentação, é uma das técnicas mais importantes no contexto do processamento digital de imagens. Entre os métodos mais conhecidos está a limiarização, que consiste em separar a imagem em regiões que compartilham características comuns.

Shannon [1], em 1948, deduziu a Equação (1), unindo conceitos da mecânica estatística formulada por Boltzmann e Gibbs [2], e que mais tarde ficou conhecida como entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon, ou entropia BGS, dada por

$$S = - \sum p_i \log p_i. \quad (1)$$

Em 1981, T. Pun [3] propôs um método para limiarização de imagens baseada na propriedade aditiva dessa entropia [1]. De maneira formal, essa propriedade pode ser descrita da seguinte forma: considera-se a distribuição das probabilidades dos n tons de cinza, dada por $P = \{p_1; p_2; \dots; p_n\}$. O método proposto em [3] separa P em duas distribuições normalizadas, sendo uma representando a região de interesse frontal ($P_P = \frac{p_1}{p_P}, \frac{p_2}{p_P}, \dots, \frac{p_t}{p_P}$), e outra representando o fundo ($P_Q = \frac{p_{t+1}}{p_Q}, \frac{p_{t+2}}{p_Q}, \dots, \frac{p_n}{p_Q}$), onde $p_P = \sum_{i=1}^t p_i$, $p_Q = \sum_{i=t+1}^n p_i$, e t (*threshold*) é um valor que divide P nas distribuições P_P e P_Q . Em seguida, aplica-se a Equação (1). O limiar ótimo, através da propriedade aditiva da entropia BGS, é dado por

$$S(P, Q) = S(P) + S(Q), \quad (2)$$

onde $S(P)$ e $S(Q)$ são as respectivas entropias dadas pela Equação (1). Então, o valor de $t = T_S$, que melhor equilibra a

quantidade de informação entre as duas regiões, é aquele que maximiza a Equação (2), ou seja,

$$T_S = \max [S(P, Q)]. \quad (3)$$

Esta técnica, por ser simples de entender e implementar, tornou-se frequente em diversas aplicações práticas e tem sido muito estudada. É aplicada aos mais variados domínios, com resultados promissores e que reforçam a eficiência da limiarização por entropia para segmentação de imagens.

No trabalho de Kapur et al. [4], maximizou-se o limiar superior da entropia máxima para obter o limiar ótimo. Este trabalho foi aprimorado por Abutaleb [5] através do método com entropias bidimensionais. No trabalho de Li e Lee [6] e Pal [7] usou-se a divergência direta de *Kullback-Leibler* [8] para selecionar o limiar ótimo, e Sahoo et al. [9] visou o mesmo objetivo utilizando a entropia de *Rényi*. Um estudo sobre essas metodologias pode ser visto em [10], que apresenta uma revisão sobre métodos de segmentação de imagens baseados em entropia.

Apesar da entropia BGS ser frequentemente aplicada a diversos problemas físicos há mais de um século, sabe-se, no entanto, que esse antigo formalismo é apenas uma aproximação quando se trata de sistemas físicos não-extensivos que ocorrem em fenômenos físicos observados como em turbulência, expansão de galáxias e interação de redes sociais, por exemplo [11].

A entropia BGS representa bem os sistemas extensivos, mas não se pode garantir que os sistemas não-extensivos também possam ser precisamente representados por ela. Para esses sistemas, em 1988 foi proposto por Constantino Tsallis a chamada q -entropia [12], uma generalização da entropia BGS que pôde ser comprovada em diversas áreas teóricas e experimentais. Em 2004, Albuquerque et al. demonstraram a aplicação da q -entropia para a limiarização de imagens digitais [13], através da pseudo-aditividade de Tsallis, uma característica da q -entropia equivalente à aditividade de BGS.

Pode-se notar a partir das Equações (1)-(3) que a limiarização calculada automaticamente através da entropia BGS é inflexível, uma vez que oferece apenas um único valor de limiar para separar as regiões. Desta forma, a medida da eficiência deste processo é dependente de análise subjetiva. Em aplicações reais, o limiar ótimo é de fato um elemento

subjetivo. No entanto, seu cálculo analítico quando depende de condições específicas, ainda é uma questão inconclusiva.

Sendo assim, propomos aqui uma alternativa à entropia BGS, de modo a contornar essa inflexibilidade. Trata-se do uso de uma ponderação entre os dois termos da aditividade - que em imagens representam a região de interesse e o fundo - através da inclusão de um parâmetro $0 \leq \alpha \leq 1$, de modo que seja possível alterar o equilíbrio para cada termo. Este novo formalismo é apresentado na Seção II.

Na Seção III são descritas as metodologias aplicadas para o cálculo do limiar ótimo, pois este é utilizado como valor para aferição da eficiência das metodologias. Tais metodologias são mostradas na Seção IV.

Para demonstrar a efetividade da ponderação da aditividade da entropia BGS para limiarização de imagens, foram conduzidos uma série de experimentos com distribuições Gaussianas artificiais, de modo a permitir controlar seus parâmetros de amplitude, desvio padrão e média, e realizar estudos do comportamento do método proposto sobre essas distribuições, sendo estes detalhados na Seção V, incluindo exemplos aplicados à limiarização de imagens reais. As discussões e considerações finais são apresentadas na Seção VI.

II. ENTROPIA DE SHANNON PONDERADA (S_w)

Nesta seção introduzimos o formalismo da metodologia proposta para redefinição da entropia BGS aplicada à limiarização de imagens, da seguinte maneira: tomando a distribuição P_P ponderada por um valor α e a distribuição P_Q ponderada por um valor $(1 - \alpha)$, onde $0 \leq \alpha \leq 1$ e $n = [1, \dots, 254]$, temos

$$S_w(P) = - \sum_{i=1}^n \alpha p_i \log \alpha p_i, \quad (4)$$

$$S_w(Q) = - \sum_{j=1}^{255-n} (1 - \alpha) q_j \log (1 - \alpha) q_j; \quad (5)$$

sendo p_i a ocorrência da distribuição P_P na iteração i , e q_j a ocorrência da distribuição P_Q na iteração j . Assim, redefinimos a propriedade da aditividade de Shannon na forma de uma pseudo-aditividade de Shannon Ponderada, como sendo:

$$S_w(P, Q) = 2 [\alpha S_w(P) + (1 - \alpha) S_w(Q)] \quad (6)$$

Na Equação (6), quando $\alpha = 0.5$, esta reduz-se à propriedade aditiva dada pela Equação (2). Convencionamos, então, chamar a propriedade aditiva apresentada na forma da Equação (6) de pseudo-aditividade-ponderada.

Analogamente ao trabalho de T. Pun [3], o limiar escolhido para a segmentação da imagem será o de maior valor na pseudo-aditividade-ponderada, dado por:

$$T_{SW} = \max [S_w(P, Q)] \quad (7)$$

Consideramos os dois subsistemas com pesos iguais ($\alpha = 0.5$) no cálculo da entropia de Shannon Ponderada sobre a distribuição P , através da Equação (4). Assim temos:

$$- \sum_{i=1}^n p_i \log p_i = - \sum_{i=1}^n 2\alpha p_i \log 2\alpha p_i$$

Desenvolvendo a equação da direita podemos concluir que, para a distribuição P , a entropia de Shannon Ponderada $S_w(P)$ é igual a entropia BGS quando $\alpha = 0.5$, ou seja,

$$- \sum_{i=1}^n p_i \log p_i = -2 \sum_{i=1}^n (\alpha p_i \log \alpha p_i) - 2\alpha, \quad (8)$$

que se pode representar por $S(P) = 2S_w(P) - 2\alpha$, e resulta na variação da entropia de Shannon Ponderada da distribuição P , dada por:

$$S(P) = 2 [S_w(P) - \alpha] \quad (9)$$

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, ao considerarmos o valor de $\alpha = 0.5$ no cálculo da entropia de Shannon Ponderada da distribuição Q , através da Equação (5), temos:

$$- \sum_{j=1}^{255-n} q_j \log q_j = - \sum_{j=1}^{255-n} 2(1 - \alpha) q_j \log 2(1 - \alpha) q_j$$

Desenvolvendo a equação da direita podemos concluir que, para a distribuição Q , considerando a ponderação $(1 - \alpha)$, com $\alpha = 0.5$, a entropia de Shannon Ponderada $S_w(Q)$ é igual a entropia BGS da distribuição Q , ou seja,

$$- \sum_{j=1}^{255-n} q_j \log q_j = -2 \sum_{j=1}^{255-n} [(1 - \alpha) q_j \log (1 - \alpha) q_j] - 2(1 - \alpha), \quad (10)$$

podendo ser representada por $S(Q) = 2S_w(Q) - 2(1 - \alpha)$, e resulta na variação da entropia de Shannon Ponderada da distribuição Q , dada por:

$$S(Q) = 2 [S_w(Q) - (1 - \alpha)] \quad (11)$$

Assim, a Equação (6), da pseudo-aditividade-ponderada sugere, analiticamente, que se pode considerar os dois subsistemas com importâncias distintas, ainda que dependentes um do outro. Isso abre a possibilidade de extrair informações com baixa probabilidade *a priori*, através de variações no balanceamento entre os respectivos subsistemas. Estas variações não se observam quando da segmentação de imagens baseada na entropia BGS, uma vez que esta considera seus subsistemas com ponderações iguais, sem margem para variações.

III. CÁLCULO DO LIMIAR ÓTIMO (T_{opt})

Para estabelecer uma comparação entre as limiarizações baseadas na entropia BGS e na entropia de Shannon Ponderada, procuramos encontrar um valor de limiar ótimo (T_{opt}) como sendo o limiar de referência que otimamente separa a região de interesse de uma imagem. Assim, neste trabalho, representamos o sistema a ser analisado por duas funções Gaussianas, de maneira a obter-se uma única função Gaussiana bimodal, estando cada Gaussiana representando uma região distinta, simulando um histograma de luminância normalizado.

Formalmente, definimos as funções Gaussianas geradas como G_1 e G_2 , discretizadas na faixa $i = [0, 1, \dots, 255]$. Definimos também c_1 e c_2 como sendo as respectivas amplitudes de G_1 e G_2 com valores iniciais $c_1 = c_2 = 1$, e também

σ_1 e σ_2 como sendo seus respectivos desvios padrões, com valores iniciais $\sigma_1 = \sigma_2 = 30$. Por fim, definimos as médias de G_1 e G_2 dadas por $\mu_1 = \frac{k}{3} 255$ e $\mu_2 = \frac{3-k}{3} 255$, onde $k = [0, \dots, 1.5]$, sendo a média normalizada entre G_1 e G_2 dada por $G = \frac{G_1(i) + G_2(i)}{\sum (G_1 + G_2)}$.

Desta forma, consideramos que a Gaussiana G representa o sistema a ser analisado, com variações destes 6 parâmetros de controle. O limiar ótimo analítico (T_{opt}) é identificado na interseção entre os subsistemas G_1 e G_2 , um mínimo global. A representação gráfica de G pode ser vista na Figura 1.

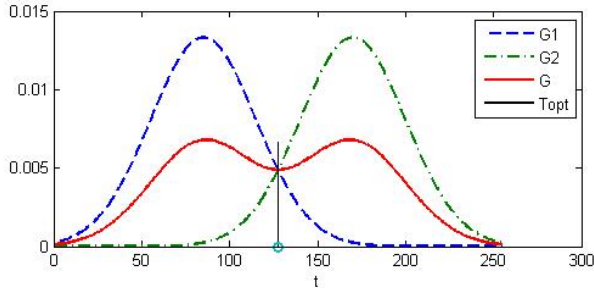


Figura 1. Funções Gaussianas G_1 e G_2 com seus parâmetros iniciais: amplitude $c_1 = c_2 = 1$; desvio padrão $\sigma_1 = \sigma_2 = 30$; médias $\mu_1 = \frac{1}{3}255$ e $\mu_2 = \frac{2}{3}255$. Função Gaussiana G , como sendo a média normalizada entre G_1 e G_2 . O limiar ótimo T_{opt} na interseção entre G_1 e G_2 , por ser um mínimo global da função G , é o limiar ótimo buscado, também encontrado analiticamente.

Considerando o caso em que ambas Gaussianas, G_1 e G_2 , possuem a mesma amplitude ($c_1 = c_2 = c$), mesmo desvio padrão ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) e variando apenas as médias (μ_1 e μ_2), temos a igualdade $G_1 = G_2$ dada por

$$c \frac{\exp\left(-\frac{(i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} = c \frac{\exp\left(-\frac{(i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad (12)$$

de onde se obtém o limiar analítico (ótimo) dado por:

$$i = T_{opt}^{medias} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2} \quad (13)$$

No caso em que as amplitudes são distintas, mas com mesmos desvios-padrões ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), temos a seguinte igualdade $G_1 = G_2$:

$$c_1 \frac{\exp\left(-\frac{(i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} = c_2 \frac{\exp\left(-\frac{(i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad (14)$$

que resulta na seguinte expressão para o limiar analítico ótimo:

$$i = T_{opt}^{amplitude} = \frac{\ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)2\sigma^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2}{2(\mu_2 - \mu_1)} \quad (15)$$

Finalmente, para representar sistemas cujas distribuições de probabilidades são semelhantes a duas funções Gaussianas com desvios padrões distintos, e mantendo as amplitudes iguais ($c_1 = c_2 = c$), temos a igualdade $G_1 = G_2$ dada por:

$$c \frac{\exp\left(-\frac{(i-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} = c \frac{\exp\left(-\frac{(i-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \quad (16)$$

Neste caso, há duas soluções para a equação, identificadas por i_1 e i_2 . Calculadas as raízes, a escolha do melhor limiar entre elas é feita conforme o *Algorithm 1* a seguir, onde T_1 e T_2 são os valores máximos encontrados, respectivamente, nas funções Gaussianas G_1 e G_2 .

Algorithm 1 Algoritmo para escolha do limiar $T_{opt}^{desvpad}$, entre duas Gaussianas com desvios padrões distintos.

```

1: Input:  $i_1$  e  $i_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ .
2: Output:  $T_{opt}^{desvpad} \in \{i_1, i_2\}$ .
3: if  $\sigma_1 < \sigma_2$  then
4:   if  $i_1 \geq T_1$  then
5:      $T_{opt}^{desvpad} \leftarrow i_1$ 
6:   else
7:      $T_{opt}^{desvpad} \leftarrow i_2$ 
8:   end if
9: else
10:  if  $i_1 \leq T_2$  then
11:     $T_{opt}^{desvpad} \leftarrow i_1$ 
12:  else
13:     $T_{opt}^{desvpad} \leftarrow i_2$ 
14:  end if
15: end if
16: return  $T_{opt}^{desvpad}$ 

```

IV. METODOLOGIA PROPOSTA

De acordo com a seção anterior, experimentos com dados sintéticos em funções Gaussianas permitem controlar os parâmetros σ_1 , σ_2 , μ_1 , μ_2 , c_1 e c_2 , que regem as distribuições de probabilidades, tornando possível estudar os seus efeitos sobre os algoritmos baseados em limiarização. Neste trabalho, os experimentos foram realizados como segue:

Para cada valor discreto t , onde $1 \leq t \leq 255$, calculam-se:

- O limiar ótimo analítico, T_{opt} , para cada variação nos parâmetros das distribuições, conforme a Seção III.
- A propriedade aditiva da entropia BGS, $S(P, Q)$, para cada variação nos parâmetros das distribuições, de acordo com a Equação (3), para encontrar o limiar de BGS (T_S).
- A pseudo-aditividade da entropia de Shannon Ponderada, $S_w(P, Q)$, para cada variação nos parâmetros das distribuições, inicialmente com o parâmetro de ponderação $\alpha = 0.5$, para encontrar o limiar de Shannon Ponderada (T_{SW}), de acordo com a Equação (7). Em seguida, aplicam-se variações em α buscando aproximar T_{SW} ao T_{opt} por meio de busca iterativa, limitada aos valores de $\alpha = [0, \dots, 1]$, sendo que o melhor valor de α a ser escolhido é aquele que mais aproxima T_{SW} ao T_{opt} e que seja o mais próximo de $\alpha = 0.5$.

Comparam-se, então, os limiares T_S e T_{SW} com o T_{opt} , para aferir a eficiência do processo, onde se consideram como melhores resultados aqueles em que os limiares analisados, T_S e T_{SW} , mais se aproximam do limiar ótimo analítico (T_{opt}), ponto de mínimo global de G .

Para calcular a quantidade de testes necessários a cada iteração, a fim de encontrar o valor de α que mantém

$T_{SW} = T_{opt}$, definimos o espaço de busca como sendo $SS_\alpha = (\alpha_{max} - \alpha_{min})10^\lambda$, onde α_{max} é o maior valor possível para α ; α_{min} é o respectivo menor, e λ é a quantidade de casas decimais (discretização). Sendo $\alpha = [0, \dots, 1]$, sabe-se que a quantidade de testes efetuados para encontrar o melhor α a cada iteração é dada por $SS_\alpha = 10^\lambda$.

V. EXPERIMENTOS SINTÉTICOS

Para a realização dos experimentos, utilizamos a metodologia descrita na Seção IV, utilizando-se de funções Gaussianas com variações de amplitude, desvio padrão e média. Os resultados são aqui apresentados.

A. Variação da Amplitude

Foram realizados 60 experimentos variando apenas a amplitude c_2 de G_2 , onde foram calculados o valor de T_{opt} para cada variação através da Equação (15). Para o cálculo da pseudo-aditividade-ponderada foram utilizados valores de α com 3 casas decimais, gerando $SS_\alpha = 10^3$; ou seja, 1000 iterações para cada variação de amplitude. O resultado de um destes experimentos é mostrado na Figura 2. Nota-se que T_S afasta-se da interseção entre G_1 e G_2 seguindo para o lado do subsistema com a maior amplitude, enquanto T_{SW} mantém-se na interseção, graças a um ajuste no parâmetro $\alpha = 0.521$.

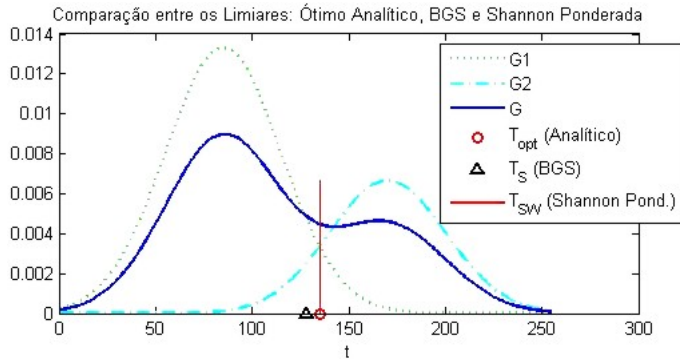


Figura 2. Exemplo dos limiares ótimo analítico, de BGS e de Shannon Ponderada, calculados sobre G , variando apenas a amplitude de G_2 , $c_2 = 0.5$, mantendo os demais parâmetros com seus valores iniciais. Os resultados foram: $T_{opt} = 134.8392$ discretizado para $T_{opt} = 135$, $T_S = 128$, e $T_{SW} = 135$ com $\alpha = 0.521$.

Os gráficos da Figura 3 mostram resultados de 20 experimentos realizados com variações da amplitude de G_2 em $c_2 = [0.1, 0.2, \dots, 2]$. Nota-se que em nenhum dos casos tivemos $T_S = T_{opt}$, mas há uma tendência de aproximação entre T_S e T_{opt} para valores de $c_2 = 1$. No entanto, constata-se que sempre há um valor de α que mantém $T_{SW} = T_{opt}$ em todos os testes.

Nos outros 40 experimentos realizados, constatou-se que em todos os casos houve um valor de α que manteve $T_{SW} = T_{opt}$, e em nenhum dos casos tivemos $T_S = T_{opt}$. Os resultados mostram a flexibilidade da entropia de Shannon Ponderada em relação à entropia BGS.

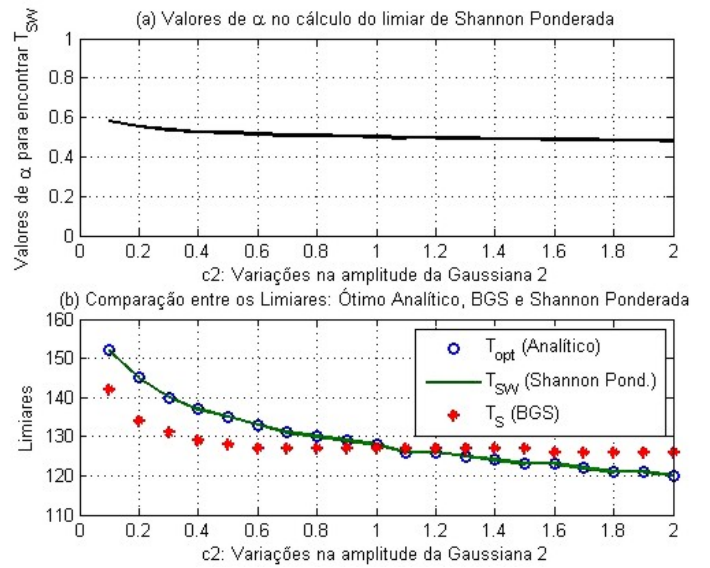


Figura 3. Testes com variações na amplitude de G_2 : (a) Melhores valores de α encontrados em cada variação de amplitude, para manter $T_{SW} = T_{opt}$. (b) Limiares de T_{opt} , T_{SW} e T_S , encontrados em cada variação de amplitude.

B. Variação do Desvio Padrão

Foram realizados 60 experimentos variando apenas o desvio padrão σ_2 de G_2 , onde o valor do T_{opt} foi calculado para cada variação de acordo com *Algorithm 1*. Para o cálculo da pseudo-aditividade-ponderada, também utilizaram-se valores de α com 3 casas decimais, o que também representa 1000 iterações para cada variação do desvio padrão. O resultado de um destes testes é mostrado na Figura 4.

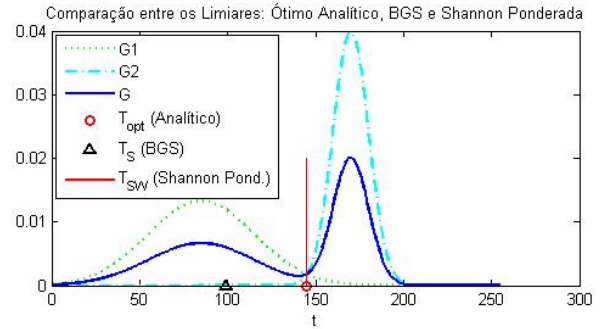


Figura 4. Exemplo dos limiares ótimos analíticos, de BGS e de Shannon Ponderada, calculados sobre G , variando apenas o desvio-padrão de G_2 , $\sigma_2 = 10$. Os resultados foram: $T_{opt} = 145.0834$ discretizado para $T_{opt} = 145$, $T_S = 99$, e $T_{SW} = 145$ com $\alpha = 0.552$.

Nota-se que T_S afasta-se da interseção entre G_1 e G_2 , seguindo para o lado do subsistema com maior desvio padrão, enquanto T_{SW} mantém-se na interseção graças a um ajuste no parâmetro $\alpha = 0.552$.

Os gráficos da Figura 5 mostram resultados de 20 experimentos realizados com variações no desvio padrão de G_2 , com $\sigma_2 = [10, 20, \dots, 200]$. Nota-se que em nenhum dos casos

tivemos $T_S = T_{opt}$, mas há uma tendência de aproximação entre T_S e T_{opt} para valores de σ_2 próximos a 30 e também para valores de $160 \leq \sigma_2 \leq 180$. No entanto, sempre houve um valor de α que manteve $T_{SW} = T_{opt}$ em todos os casos. Este comportamento pode ser observado no gráfico da Figura 5(b), pela sobreposição das curvas para T_{opt} e T_{SW} .

Nos outros 40 experimentos realizados com variações apenas no desvio padrão, constatou-se que em todos os casos houve um valor de α que manteve $T_{SW} = T_{opt}$, e em nenhum dos casos tivemos $T_S = T_{opt}$. Os resultados reforçam a flexibilização da entropia de Shannon Ponderada em relação à entropia BGS.

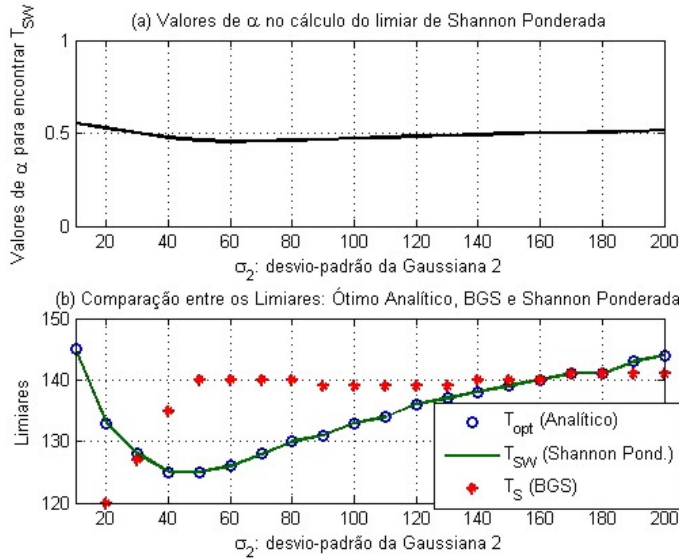


Figura 5. Testes com variações no desvio padrão de G_2 : (a) Melhores valores de α encontrados em cada variação do desvio padrão, para manter $T_{SW} = T_{opt}$. (b) Limiares de T_{opt} , T_{SW} e T_S , encontrados em cada variação do desvio padrão.

C. Variação das Médias

Neste caso, foram realizados 31 experimentos com alterações no valor de $k = [0, 0.05, \dots, 1.5]$ que é utilizado para o cálculo entre as médias μ_1 e μ_2 de G_1 e G_2 . Para o cálculo do limiar ótimo analítico (T_{opt}) em cada variação, foi aplicada a Equação (13). Para o cálculo da pseudo-aditividade-ponderada, foram utilizados os valores de α com 6 casas decimais, no intervalo de $\alpha = [0.49, \dots, 0.51]$, gerando $SS_\alpha = 0.02^6$, sendo 20.000 iterações para cada variação de k . O resultado de um destes experimentos é mostrado na Figura 6. Nota-se que T_S afasta-se da interseção entre G_1 e G_2 , enquanto T_{SW} mantém-se na interseção graças a um ajuste no parâmetro $\alpha = 0.49807$.

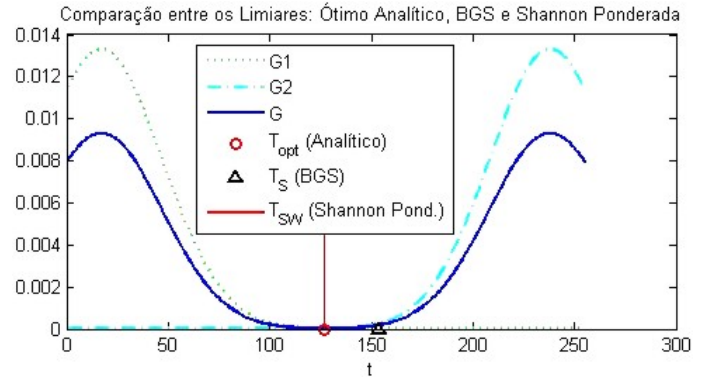


Figura 6. Exemplo dos limiares ótimo analítico, de BGS e de Shannon Ponderada, calculados sobre G , variando apenas o valor de $k = 0.2$, resultando nas médias $\mu_1 = \frac{0.2}{3} 255$ e $\mu_2 = \frac{2.8}{3} 255$. Os demais parâmetros foram mantidos com seus valores iniciais. Os resultados foram: $T_{opt} = 127$, $T_S = 154$, e $T_{SW} = 127$ com $\alpha = 0.49807$.

Os gráficos da Figura 7 mostram resultados dos 31 experimentos realizados com variação apenas do valor de $k = [0, 0.05, \dots, 1.5]$. Nota-se que o valor de T_S converge para o valor de T_{opt} , conforme o valor de k aumenta. Observa-se também que, para valores de $k > 0.5$, há uma tendência de aproximação entre T_S e T_{opt} . Para valores onde $k < 0.5$, apresentando um grande afastamento entre as Gaussianas, a tendência é de $T_S \gg T_{opt}$.

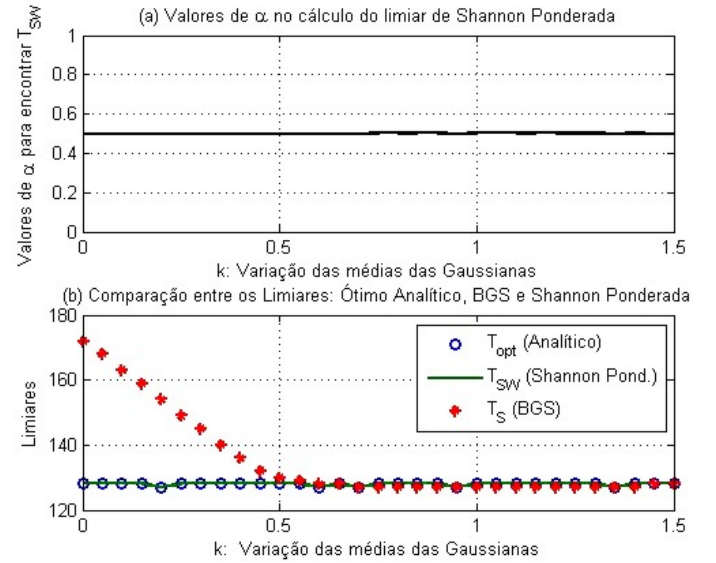


Figura 7. Testes com variações nas médias μ_1 e μ_2 através do valor de k , mantendo os demais parâmetros com seus valores iniciais: (a) Melhores valores de α encontrados em cada variação de k para manter $T_{SW} = T_{opt}$ no cálculo da entropia de Shannon Ponderada. (b) Limiares de T_{opt} , T_{SW} e T_S , encontrados em cada variação de k .

Pode-se notar que, para todos os valores de $k = [0, \dots, 1.5]$, os ajustes no parâmetro α foram eficazes, pois mantiveram $T_{SW} = T_{opt}$ em todos os experimentos.

Finalmente, a Figura 8 mostra exemplos de limiarização pela entropia de Shannon Ponderada em imagens reais, com

variações do parâmetro $\alpha = [0.1, 0.2, \dots, 0.9]$. Nota-se que, para $\alpha = 0.5$, o resultado é o mesmo da entropia BGS.

Para valores de $\alpha < 0.5$ observa-se um peso maior à região de interesse da imagem (representada pela cor branca), e para $\alpha > 0.5$ observa-se um peso maior ao fundo da imagem (representada pela cor preta).

Imagens originais		
$\alpha = 0.1$	 $T_{sw} = 10$	 $T_{sw} = 15$
$\alpha = 0.2$	 $T_{sw} = 11$	 $T_{sw} = 76$
$\alpha = 0.3$	 $T_{sw} = 15$	 $T_{sw} = 76$
$\alpha = 0.4$	 $T_{sw} = 97$	 $T_{sw} = 114$
$\alpha = 0.5$	 $T_{sw} = 135$ $T_s = 135$	 $T_{sw} = 128$ $T_s = 128$
$\alpha = 0.6$	 $T_{sw} = 183$	 $T_{sw} = 196$
$\alpha = 0.7$	 $T_{sw} = 234$	 $T_{sw} = 203$
$\alpha = 0.8$	 $T_{sw} = 249$	 $T_{sw} = 222$
$\alpha = 0.9$	 $T_{sw} = 253$	 $T_{sw} = 240$

Figura 8. Exemplos de limiarização pela entropia de Shannon Ponderada com diversos valores de α , a partir de imagens originais em 256 tons de cinza.

VI. CONCLUSÕES

Os experimentos sintéticos realizados neste trabalho, com variações nas amplitudes, desvios padrões e médias entre funções Gaussianas, mostraram que, no cálculo da entropia de Shannon Ponderada, sempre há um valor de α que mantém o limiar T_{sw} igual ao limiar ótimo T_{opt} , em todos os casos estudados. Isto sugere uma correlação entre o valor de α e um valor dependente dos parâmetros da distribuição.

Observou-se que, ao aplicar as variações nos parâmetros das funções Gaussianas, a propriedade aditiva da entropia BGS

gera um limiar (T_S) que tende a afastar-se do limiar ótimo (T_{opt}) na maioria dos casos. Com a inflexibilidade da entropia BGS não há como promover ajustes para manter $T_S = T_{opt}$.

Os resultados mostram a eficiência da metodologia da entropia de Shannon Ponderada, através do ajuste do parâmetro α que pondera os subsistemas, abrindo assim a possibilidade de analisarmos informações que podem estar representadas por pequenas probabilidades, por exemplo. Isto significa, na aplicação da entropia de Shannon Ponderada aplicada na segmentação de imagens, poder atribuir pesos diferentes ao fundo em relação à região de interesse das imagens, sendo mais um recurso para análise de imagens a partir de segmentação.

Observando as variações nos valores de α nos testes efetuados, este manteve um comportamento estável entre os valores de $\alpha = [0.4, \dots, 0.6]$. Este comportamento pode ser observado nas Figuras 3(a), 5(a) e 7(a).

Apesar de os experimentos realizados para encontrar o valor de α tenham sido efetuados de forma iterativa, a busca deste parâmetro na aplicação da entropia de Shannon Ponderada para segmentação de imagens não se caracteriza como um método iterativo, pois há uma tendência à estabilidade neste parâmetro, abrindo a perspectiva para novas investigações a fim de associá-lo a características físicas da imagem, e assim determiná-lo automaticamente ou por conhecimento *a priori*. Tornar-se-á, assim, mais um importante componente para análise e extração de informações no processo de segmentação.

REFERÊNCIAS

- [1] C. Shannon, "A mathematical theory of communication," *The Bell System Technical Journal*, 1948.
- [2] E. P. Borges, "Irreversibilidade, desordem e incerteza: Três visões da generalização do conceito de entropia," *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 21, no. 4, p. 453, Dezembro 1999.
- [3] T. Pun, "Entropic thresholding: A new approach," *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 16, no. 3, pp. 210–239, July 1981.
- [4] J. N. Kapur, P. K. Sahoo, and A. K. C. Wong, "A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram," *Computer Graphics Image Process*, vol. 29, pp. 273–285, 1985.
- [5] A. S. Abutaleb, "A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram," *Comput. Graphics Image Process*, vol. 47, pp. 22–32, 1989.
- [6] C. H. Li and C. K. Lee, "Minimum cross entropy thresholding," *Pattern Recognition*, vol. 26, pp. 617–625, 1993.
- [7] N. R. Pal, "On minimum cross entropy thresholding," *Pattern Recognition*, vol. 26, pp. 575–580, 1996.
- [8] S. Kullback and R. Leibler, "On information and sufficiency," *The Annals of Mathematical Statistics* 22(1), *The George Washington University*, pp. 79–86, 1951.
- [9] P. Sahoo, S. Soltani, A. Wong, and Y. Chen, "A survey of thresholding techniques," *Computer Vision Graphics Image Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 233–260, 1988.
- [10] C.-I. Chang, Y. Du, J. Wang, S.-M. Guo, and P. Thouin, "Survey and comparative analysis of entropy and relative entropy thresholding techniques," *The Institution of Engineering and Technology*, 2006.
- [11] C. Tsallis, "Nonextensive statistical mechanics and its applications," *Lecture Notes in Physics*, vol. 560, 2001.
- [12] C. Tsallis, "Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics," *Journal of Statistical Physics*, vol. 52, pp. 479–487, 1988.
- [13] M. P. Albuquerque, M. P. Albuquerque, I. Esquef, and A. Mello, "Image thresholding using tsallis entropy," *Pattern Recognition Letters, Elsevier B.V.*, 2004.